МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Обнинский институт атомной энергетики –
филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(ИАТЭ НИЯУ МИФИ)
,

Одобрено УМС ИАТЭ НИЯУ МИФИ,
Протокол №2-8/2021 От 30.08.2021

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Методы оптимизации

Шифр, название дисциплины

для студентов специальности/направления подготовки

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Шифр, название специальности/направления подготовки

специализации/профиля

Шифр, название специализации/профиля

Форма обучения: очная

г. Обнинск 2021 г.

Программа составлена в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» по направлению подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика.

Программу составила:

___________________ А.Н. Чепурко, доцент, к.ф.-м.н, доцент

Рецензент:

____________________Р.Х. Алмаев, профессор каф. ВМ, д. ф.-м. н.

Программа рассмотрена на заседании отделения интеллектуальных кибернетических систем (О) (протокол № 5/7 от «30» июля 2021 г.)

Руководитель образовательной программы
01.03.02 – «Прикладная математика и информатика»
__________________ С.В. Ермаков

«____»____________2021 г.

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения ООП бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Коды компетенций	**Результаты освоения ООП** ***Содержание компетенций****	**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине****
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	**Знать**: основные методы оптимизации, принцип Ферма и принцип Лаграна, уравнение Эйлера для простейшей вариационной задачи, принцип максимума Понтрягина для решения задачи оптимального управления, основные численные методы нахождения минимума функций одной и нескольких переменных в задаче с ограничениями и без них. **Уметь**: ставить и решать оптимизационные задачи, подбирать и применять наиболее подходящий аналитический и (или) численный метод решения поставленной задачи **Владеть**: навыками решения экстремальных задач, а также использования для этих целей различных специализированных пакетов программ.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина реализуется в рамках общепрофессионального модуля.

Для освоения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в рамках изучения следующих дисциплин: «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения».

Дисциплина изучается на 3 курсе в 5 семестре.

3. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость (объем) дисциплины составляет 4 зачетных единиц (з.е.), 144 академических часов.

3.1. Объём дисциплины по видам учебных занятий (в часах)

Объем дисциплины	Всего часов	
	Очная форма обучения	Заочная форма обучения
Общая трудоемкость дисциплины	180	

Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) (всего)	64	
Аудиторная работа (всего):	64	
в том числе:		
лекции	32	
семинары, практические занятия	16	
лабораторные работы	16	
Внеаудиторная работа (всего):	-	
в том числе, индивидуальная работа обучающихся с преподавателем:	-	
курсовое проектирование	-	
групповая, индивидуальная консультация и иные виды учебной деятельности, предусматривающие групповую или индивидуальную работу обучающихся с преподавателем	-	
творческая работа (эссе)	-	
Самостоятельная работа обучающихся (всего)	44	
Вид промежуточной аттестации обучающегося (экзамен)	36	

4. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)

№ п/п	Наименование раздела /темы дисциплины	Общая трудоём-кость всего *(в часах)*	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость *(в часах)*				Формы текущего контроля успевае-мости
			Аудиторные учебные занятия			СРО	
			Лек	Сем/Пр	Лаб		
1.	**Аналитические методы оптимизации**	64	20	12	-	32	
1.1.	Постановка экстремальных задач.	13	3	2	-	8	
1.2.	Задача выпуклого программирования.	13	3	2	-	8	
1.3.	Простейшая вариационная задача.	15	4	3	-	8	
1.4.	Задача оптимального управления.	23	10	5	-	8	
2.	**Численные методы оптимизации**	44	12	4	16	12	
2.1.	Численные методы нахождения минимума функции одной переменной.	15	3	2	6	4	

2.2.	Минимизация функций **n** переменных в гладкой задаче без ограничений.	15	4	1	6	4	
2.3.	Минимизация функций n переменных в задаче с ограничениями.	14	5	1	4	4	

4.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам (темам)

Лекционный курс

№	Наименование раздела /темы дисциплины	Содержание
1.	**Аналитические методы оптимизации**	
1.1.	Постановка экстремальных задач.	Элементы дифференциального исчисления в банаховых пространствах. Принцип Ферма. Гладкая задача с ограничениями. Принцип Лагранжа снятия ограничений.
1.2.	Задача выпуклого программирования.	Экстремальные свойства выпуклых функций. Отделимость выпуклых множеств. Теорема Куна-Таккера. Принцип Седловой точки.
1.3.	Простейшая вариационная задача.	Задача Больца. Необходимые условия экстремума. Уравнение Эйлера. Условия трансверсальности. Непрерывность канонических переменных.
1.4.	Задача оптимального управления.	Теорема Эйлера-Лагранжа. Соотношение Беллмана. Уравнение Гамильтона-Якоби. Принцип максимума Понтрягина. Связь принципа максимума Понтрягина с принципом Лагранжа снятия ограничений. Задача со старшими производными.
2.	**Численные методы оптимизации**	
2.1.	Численные методы нахождения минимума функции одной переменной.	Методы деления отрезка пополам, золотого сечения. Минимизация функции, удовлетворяющей условию Липшица. Метод ломаных, теорема о сходимости. Минимизация выпуклой и дифференцируемой функции. Метод касательных.
2.2.	Минимизация функций **n** переменных в гладкой задаче без ограничений.	Градиентные методы. Метод Ньютона. Свойства сильно выпуклых функций. Теорема о сходимости процедуры скорейшего спуска.
2.3.	Минимизация функций n переменных в задаче с ограничениями.	Метод проекции градиента, метод условного градиента, метод штрафных функций.

Практические/семинарские занятия

№	Наименование раздела /темы дисциплины	Содержание
1.	**Аналитические методы оптимизации**	
1.1.	Постановка экстремальных задач.	Производная отображений. Принципы Ферма и Лагранжа.

1.2.	Задача выпуклого программирования.	Использование теоремы Куна-Таккера для решения задачи выпуклого программирования.
1.3.	Простейшая вариационная задача.	Уравнение Эйлера. Задача Больца. Условия трансверсальности.
1.4.	Задача оптимального управления.	Изопериметрическая задача. Задача со старшими производными.
1.4.	Задача оптимального управления.	Задача Лагранжа. Теорема Эйлера-Лагранжа. Соотношение Беллмана. Уравнение Гамильтона-Якоби.
1.4.	Задача оптимального управления.	Использование принципа максимума Понтрягина для решения ЗОУ.
2.	**Численные методы оптимизации**	
2.1.	Численные методы нахождения минимума функции одной переменной.	Метод золотого сечения, метод касательных, метод ломаных. Вывод основных формул, свойства.
2.2.	Минимизация функций **n** переменных в гладкой задаче без ограничений.	Градиентные методы.
2.3.	Минимизация функций n переменных в задаче с ограничениями.	Метод проекции градиента. Проекция точки на множества. Метод условного градиента, нахождение минимума линейной функции на выпуклом множестве.

Лабораторные занятия

№	Наименование раздела /темы дисциплины	Содержание
2.	**Численные методы оптимизации**	
2.1.	Численные методы нахождения минимума функции одной переменной.	Метод золотого сечения, метод касательных.
2.2.	Минимизация функций **n** переменных в гладкой задаче без ограничений.	Метод скорейшего спуска. Метод Ньютона.
2.3.	Минимизация функций n переменных в задаче с ограничениями.	Метод проекции градиента. Метод условного градиента.

5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

В качестве учебно-методических материалов используется рекомендованная литература.

6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

6.1. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины (результаты по разделам)	Код контролируемой компетенции (или её части) / и ее формулировка	Наименование оценочного средства
1.1	Постановка экстремальных задач.	ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИДЗ № 1 (решение задачи)
1.3.	Простейшая вариационная задача.	ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИДЗ № 2 и № 3 (решение задач)
1.4.	Задача оптимального управления.	ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ИДЗ № 4, № 5, № 6 и № 7 (решение задач)
2.1.	Численные методы нахождения минимума функции одной переменной.	ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Защита лабораторной работы № 1 (вывод основных формул для алгоритмов)
2.2.	Минимизация функций **n** переменных в гладкой задаче без ограничений.	ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Защита лабораторной работы № 2 (вывод основных формул для алгоритмов)
2.3.	Минимизация функций **n** переменных в задаче с ограничениями.	ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или)	Защита лабораторной работы № 3 (вывод основных формул для алгоритмов)

		естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы

6.2.1. Экзамен

В экзаменационном билете два теоретических вопроса: один по аналитическим методам оптимизации, второй – по численным методам оптимизации.

Теоретические вопросы билета:

1. Производная отображения (определение и свойства). Принцип Ферма.
2. Гладкая задача с ограничениями. Принцип Лагранжа снятия ограничений. Теорема Лагранжа.
3. Определение выпуклой функции. Экстремальные свойства выпуклых функций.
4. Определение выпуклых множеств. Отделимость выпуклых множеств.
5. Задача выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера (формулировка).
6. Простейшая вариационная задача. Необходимое условие экстремума.
7. Каноническая форма записи уравнения Эйлера.
8. Задача Больца. Необходимое условие экстремума. Условия трансверсальности.
9. ЗОУ. Теорема Эйлера-Лагранжа. Связь принципа максимума Понтрягина с принципом Лагранжа снятия ограничений.
10. Пример использования теоремы Эйлера-Лагранжа. Задача со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.
11. Пример использования теоремы Эйлера-Лагранжа. Изопериметрическая задача.
12. Автономная задача оптимального управления. Соотношение Беллмана.
13. Уравнение Беллмана. Уравнение Гамильтона-Якоби.
14. Принцип максимума для автономной задачи с фиксированными концами.
15. Принцип максимума для автономной задачи с подвижными концами.
16. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления.
17. Нахождение минимума функции одной переменной. Активный и пассивный поиск. Метод деления отрезка пополам.
18. Нахождение минимума функции одной переменной. Метод золотого сечения.
19. Нахождение минимума функции, удовлетворяющей условию Липшица. Алгоритм метода ломаных.
20. Теорема о сходимости метода ломаных.
21. Нахождение минимума выпуклой и дифференцируемой функции. Метод касательных.
22. Минимизация функции n переменных в гладкой задаче без ограничений. Метод скорейшего спуска.
23. Минимизация дважды непрерывно дифференцируемой функции n переменных. Метод Ньютона.
24. Сильно выпуклые функции. Эквивалентные определения сильной выпуклости (теорема).
25. Свойство сильно выпуклой функции, производная которой удовлетворяет условию Липшица.
26. Теорема о сходимости процедуры скорейшего спуска.
27. Проекция точки на множество. Примеры нахождения проекции $P(z)$.
28. Проекция точки на множество. Свойства проекции $P(z)$ (лемма 1).
29. Алгоритм метода проекции градиента. Леммы 2, 3.
30. Теорема о сходимости метода проекции градиента.
31. Алгоритм метода условного градиента. Обоснование условия выхода.

32. Теорема о сходимости метода условного градиента.

Критерий оценки – правильность и полнота ответа на вопросы. Оценка выставляется по шкале от 0 до 40 баллов: теоретические вопросы –30 баллов, 10 баллов– дополнительные вопросы. Экзамен считается сданным при оценке не ниже 25 баллов.

6.2.2. Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ)

Индивидуальное домашнее задание состоит из семи задач по следующим темам: принцип Ферма и принцип множителей Лагранжа, простейшая вариационная задача, задача Больца, соотношение Беллмана, изопериметрическая задача, задача Лагранжа, задача со старшими производными.

а) типовое индивидуальное домашнее задание:

№ 1. Решить следующую задачу, используя теорему Ферма и принцип множителей Лагранжа:

Дан круг радиуса единица. На диаметре АВ дана точка Е, через которую проведена хорда СД. Найти положение хорды, при котором площадь четурехугольника АВСД максимальна.

№ 2. Найти гладкие решения простейшей вариационной задачи:

$$\int_1^e \left(2x - t^2\dot{x}^2\right)dt \to \text{extr},\ x(1) = e,\ x(e) = 0.$$

№ 3. Решить задачу Больца:

$$\int_1^2 t^2\dot{x}^2dt - 2x(1) + x^2(2) \to \text{extr}.$$

№ 4. Записать соотношение Беллмана, уравнение Гамильтона-Якоби для ПВЗ из задания № 2. Найти его решение $\bar{\omega}(t,x)$.

№ 5. Найти допустимые экстремали в изопериметрической задаче:

$$\int_0^\pi \dot{x}^2dt \to \text{extr}; \int_0^\pi x\sin t dt = 0,\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 1..$$

№ 6. Найти допустимые экстремали в задаче Лагранжа:

$$\int_0^1 u^2dt \to \text{extr};\ \ddot{x} - x = u,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = \text{sh}1,\ \dot{x}(1) = \text{ch}1 + \text{sh}1.$$

№ 7. Найти допустимые экстремали в задаче со старшими производными:

$$\int_0^1 \ddot{x}^2dt \to \text{extr};\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(1) = 1.$$

б) критерии оценивания компетенций (результатов) – правильность и полнота выполнения всех шагов решения задачи.

в) описание шкалы оценивания:
1, 2, 3, 5, 6 и 7 задачи оцениваются по шкале от 0 до 5 баллов. 4 задача оценивается по шкале от 0 до 6 баллов.
Индивидуальное домашнее задание считается выполненным успешно при отсутствии задач с нулевой оценкой и при суммарной оценке не ниже 25 баллов.

6.2.2. Лабораторные работы

Лабораторный практикум по данному курсу состоит из трёх заданий по следующим темам: численные методы нахождения минимума функции одной переменной, минимизация функций **n** переменных в гладкой задаче без ограничений, минимизация функций n переменных в задаче с ограничениями.

а) типовое задание:

Лабораторная работа № 1. Нахождение точки минимума и минимального значения функции одной переменной.

Минимизировать функцию $f(x) = x - \ln(x),\ x \in [0.1, 2]$ двумя способами: методом золотого сечения и методом касательных.

Лабораторная работа № 2. Минимизация функций **n** переменных в гладкой задаче без ограничений.

Минимизировать функцию $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + \exp(x_1^2 + x_2^2) - x_1 + 2x_2$ двумя способами: методом скорейшего спуска и методом Ньютона

Лабораторная работа № 3. Минимизация функций **n** переменных в гладкой задаче с ограничениями.

$$x_1^2 + x_2^2 + -6x_1 - 4x_2 \to \min, \quad x_1 + x_2 \le 2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Минимизировать двумя способами: методом проекции градиента и методом условного градиента.

б) критерии оценивания компетенций (результатов) – правильная работа кода программы, понимание алгоритма метода оптимизации, умение вывести необходимые для алгоритма формулы.

в) описание шкалы оценивания:

Лабораторные работы № 1 и № 3 оцениваются по шкале от 0 до 10, лабораторная работа № 2 оценивается по шкале от 0 до 4.

Лабораторные работы считаются выполненными успешно при отсутствии работ с нулевой оценкой и при суммарной оценке не ниже 10 баллов.

6.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Форма аттестации	Наименование оценочного средства	Баллы
Экзамен (100 баллов)	Индивидуальное домашнее задание (ИДЗ)	36
	Лабораторные работы	24
	Ответы на экзаменационный билет	40

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная учебная литература:

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Физматлит, 2005. – 384с. (имеется в библиотеке ИАТЭ).

2. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи. – М.: Физматлит, 2011. – 255с. (имеется в библиотеке ИАТЭ).

3. Васильев Ф.П. Численные методы решение экстремальных задач. Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 552с. (имеется в библиотеке ИАТЭ).

б) дополнительная учебная литература:

1. Белов Ю.А. Методы оптимизации. Учеб. Пособие по специальности «Прикладная математика». – Обнинск: ГТУ-ИАТЭ, 2004, - 180с. (имеется в библиотеке кафедры).

8. Перечень ресурсов* информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины

1. Ресурсы электронно-библиотечной системы издательства «Лань» // URL: www.e.lanbook.com (по подписке).

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Вид учебного занятия	Организация деятельности студента
Лекция	Написание конспекта лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Проверка терминов, понятий с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь. Обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, на практическом занятии. Уделить внимание следующим понятиям: множители Лагранжа, допустимая экстремаль, уравнение Эйлера, условия трансверсальности, функция Лагранжа, функция Понтрягина, принцип максимума Понтрягина.
Практические занятия	Проработка рабочей программы, уделяя особое внимание целям и задачам, структуре и содержанию дисциплины. Работа с конспектом лекций, просмотр рекомендуемой литературы. Изучение выбранной предметной области на примерах решения задач семинарских занятий, индивидуальных домашних заданий.
Курсовая работа	Не предусмотрена
Индивидуальное домашнее задание	Ознакомиться с основной и дополнительной литературой, включая справочные издания, зарубежные источники, основополагающие термины. Попрактиковаться в решении аналогичных общих домашних задач по всем темам индивидуальных домашних заданий.
Лабораторная работа	При реализации численного поиска минимума функций уделить внимание используемым в алгоритмах идеям, выводе основных формул, оценке точности полученного численного решения.
Подготовка к экзамену	При подготовке к экзамену необходимо ориентироваться на конспекты лекций и рекомендуемую литературу.

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Издательская система LaTeX для подготовки докладов, презентаций и учебного материала.

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Видеопроектор, компьютер, издательская система LaTeX для подготовки докладов, презентаций и учебного материала.

12. Иные сведения и (или) материалы

12.1. Перечень образовательных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Часов в интерактивной форме – 17.

В ходе практических занятий происходит публичное обсуждение каждой решаемой задачи. При этом студенты высказывают свои мнения по выбору наиболее простого способа поиска оптимального решения.

После решения домашних работ на консультациях проводится разбор допущенных студентами ошибок.

12.2. Формы организации самостоятельной работы обучающихся (темы, выносимые для самостоятельного изучения; вопросы для самоконтроля; типовые задания для самопроверки

Некоторые темы изучаются студентами самостоятельно. Для изучения используется приведённая в списке основная и дополнительная литература. Контроль освоения материала осуществляется при приёме индивидуального домашнего задания, при защите лабораторных работ и в ходе экзамена.

№	Тема и часть, изучаемая (осваиваемая) самостоятельно
1.1	Свойства производных отображений.
1.2	Принцип седловой точки.
1.3	Векторная вариационная задача. Непрерывность канонических переменных.
1.4	Связь принципа максимума Понтрягина с принципом Лагранжа снятия ограничений.
2.1	Метод парабол, метод ломаных.
2.2	Градиентный метод с постоянным шагом, метод сопряженных градиентов.
2.3	Метод штрафных функций.

Вопросы и задания для самоконтроля по всем темам:

1. Что такое золотое сечение отрезка?
2. Пусть точки x и y являются золотым сечением отрезка $[a,b]$, при этом $x < y$. Докажите, что x - золотое сечение отрезка $[a, y]$.
3. Пусть точка x является золотым сечением отрезка $[a,b]$. В каком отношении точка x разбивает отрезок $[a,b]$?
4. Для каких функций применим метод золотого сечения?
5. Что такое выпуклая функция, квазивыпуклая функция, строго выпуклая функция, сильно выпуклая функция?
6. Приведите пример квазивыпуклой функции, не являющейся выпуклой.
7. Для каких функций применим метод касательных?
8. Для каких функций применим метод ломаных?
9. Если $f(x)$ - функция нескольких переменных, то что такое $f'(x)$ и $f''(x)$?
10. Для каких функций применим метод Ньютона?
11. Найти проекцию точки на заданное выпуклое множество (шар, многогранник, гиперплоскость).
12. Найти минимум линейной функции на заданном ограниченном выпуклом множестве.

13. Что такое функция Лагранжа для гладкой задачи с ограничениями типа равенств?
14. Что такое допустимая экстремаль?
15. Что такое условия трансверсальности?
16. Сведите простейшую вариационную задачу к задаче оптимального управления. Запишите для неё соотношения принципа максимума.
17. Сведите изопериметрическую задачу к задаче оптимального управления. Запишите для неё соотношения принципа максимума.
18. Сведите задачу со старшими производными к задаче оптимального управления. Запишите для неё соотношения принципа максимума.
19. Что такое автономная задача оптимального управления?
20. Какие значения принимает функция Понтрягина для автономной задачи оптимального управления?
21. Что такое выпуклое множество?
22. Как строится функция Лагранжа для задачи выпуклого программирования.
23. Что такое условия дополняющей нежесткости?
24. Необходимое и достаточное условие минимума для выпуклой дифференцируемой функции на выпуклом множестве.

12.3. Краткий терминологический словарь

Простейшая вариационная задача	$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr, x(\alpha) = a, x(\beta) = b.$
Экстремаль	Функция $\widehat{x}(t)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера, называют экстремалью.
Допустимая экстремаль	Экстремаль, удовлетворяющая ограничениям задачи, называют допустимой.
Уравнение Эйлера	$f_x(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$
Задача Больца	$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \varphi(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to extr.$
Задача Больца с фиксированным сегментом	$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \varphi(x(\alpha), x(\beta)) \to extr.$
Условия трансверсальности	$\widehat{f}_{\dot{x}}(\widehat{t}_0) = \widehat{\varphi}_{x(t_0)}, \ \widehat{f}_{\dot{x}}(\widehat{t}_1) = -\widehat{\varphi}_{x(t_1)}$ $\left[-\widehat{f} + \dot{\widehat{x}}\,\widehat{f}_{\dot{x}}\right](\widehat{t}_0) = -\widehat{\varphi}_{t_0}, \left[-\widehat{f} + \dot{\widehat{x}}\,\widehat{f}_{\dot{x}}\right](\widehat{t}_1) = \widehat{\varphi}_{t_1}$
Гладкая задача с ограничениями типа равенств	$f_0(x) \to \min, f_1(x) = 0, \ \dots, \ f_m(x) = 0, x \in R^n, m < n,$ $f_i(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции
Функция Лагранжа	$L(x, \lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_m f_m(x)$